TEMA 7: INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN LINEAL

INTRODUCCIÓN. ~~PROBLEMA A RESOLVER~~

Ejemplo Modelo: una empresa Química produce dos compuestos A y B. El compuesto A se vende a 3 euros el kg mientras que el compuesto B se vende a 2 euros el kg.
Por razones logísticas, la suma de la producción de ambos compuestos no puede ser superior a 3000kg al día.
Además, debido al alto poder contaminante del proceso de síntesis del compuesto A, la legislación no permite que se produzcan más de 2000kg al día del mismo.
Encontrar la cantidad diaria a producir de cada uno de los productos para maximizar el beneficio económico.

Solución:

$x \equiv$ cantidad diaria de compuesto A

$y \equiv$ " " " " B.

Beneficio: $3x + 2y \to$ Maximizar

Restricciones:

$$x + y \leq 3000$$
$$x \leq 2000$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Modelo Matemático:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & f(x,y) = 3x + 2y \\ \text{sujeto a} & \\ & x + y \le 3000 \\ & 0 \le x \le 2000 \\ & y \geq 0 \end{cases}$$

} restricciones.

$(x,y) \equiv$ variable de optimización. Incógnita del problema

$f(x,y) \equiv$ función objetivo (o coste)

Este es un ejemplo típico de problema de programación lineal.

De forma más general un problema de programación lineal se formula como:

$$(PPL) \begin{cases} \text{Minimizar} & f(x) = b \cdot x \\ \text{sujeto a} & \\ & Ax \le c \\ & Aeq\, x = ceq \end{cases}$$

donde

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ variable de optimización

$b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ vector de costes

$f = f(x_1, \dots, x_n)$ función objetivo

$Ax \le c$ restricciones de desigualdad

$Aeq\, x \le ceq$ '' '' igualdad

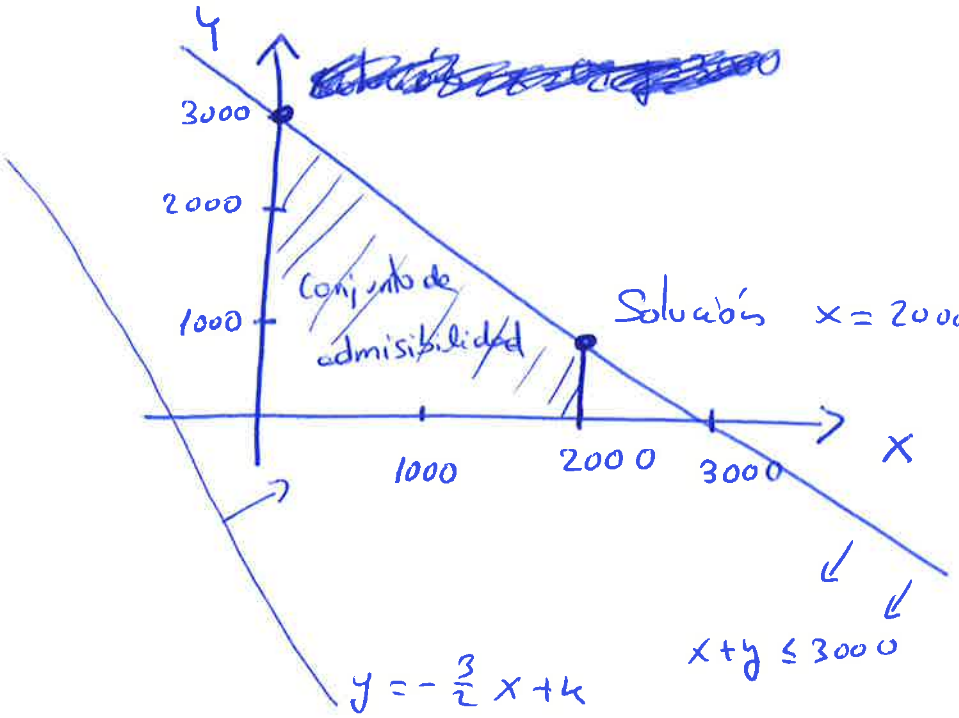
A, Aeq matrices, c, ceq vectores conocidos.

Origen histórico: Alrededor de 1946, G. Dantzing inventa el Método Simplex, que es quizás el método más usado para resolver problemas de programación lineal de tamaño medio -grande.

La programación lineal se aplica, en la optimización de procesos químicos tales como la planificación de actividades en una planta química, entre otras.
Para más aplicaciones, véase: E.T. Himmelblau, Optimization of chemical processes. Mc Graw-Hill 1988.

Resolución geométrica del problema modelo anterior

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & f(x,y) = 3x + 2y = k \quad \longrightarrow \quad 2y = -3x + k \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad y = -\frac{3}{2}x + k \\ \text{sujeto a} & x + y \leq 3000 \\ & 0 \leq x \leq 2000 \\ & y \geq 0 \end{cases}$$



$x + y = 3000$

x	y
0	3000
3000	0

Solución $x = 2000$, $y = 1000$.

$x + y = 3000$

• Se llama conjunto de admisibilidad al conjunto de puntos $x=(x_1,\dots,x_n)$ que cumplen las restricciones del problema.

Propiedad: En programación lineal, el óptimo, si existe, se alcanza en un vértice del conjunto de admisibilidad.

Esta propiedad proporciona el siguiente método algebraico de resolución:

1º) Se calculan los vértices del conjunto de admisibilidad

2º) Se evalúa la función objetivo en dichos vértices.

El vértice que de el mayor o menor coste, dependiendo de si el problema es de maximización o minimización, proporciona el óptimo.

En el ejemplo anterior:

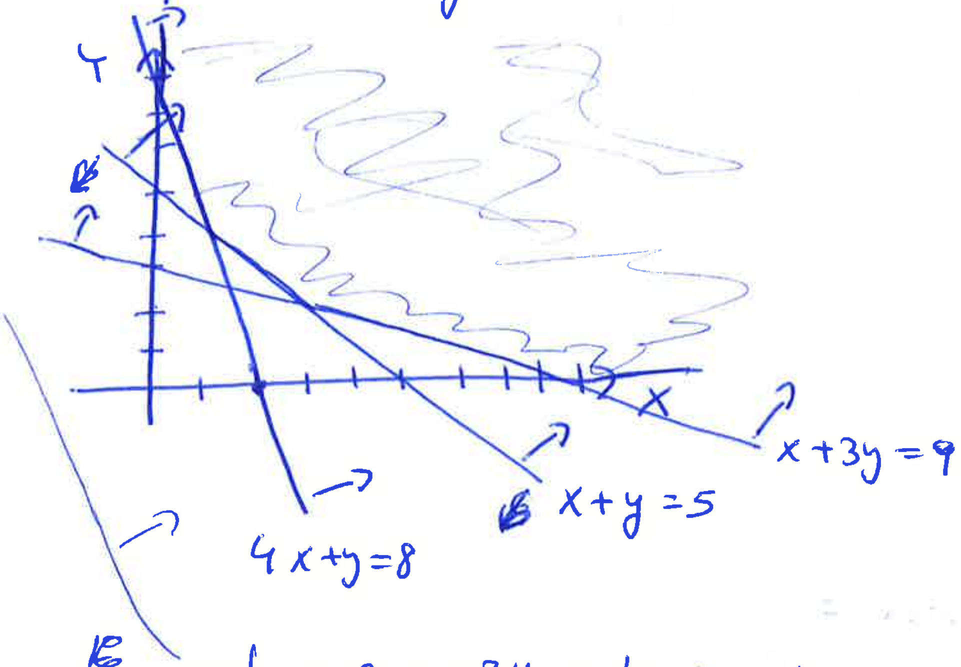
Vértices		$f(x,y)=3x+2y$	
$(0,0)$	$\longrightarrow$	$f(0,0)=0$	
$(2000,0)$	$\longrightarrow$	$f(2000,0)=6000$	
$(2000,1000)$	$\longrightarrow$	$f(2000,1000)=8000$	$\leftarrow$ óptimo.
$(0,3000)$	$\longrightarrow$	$f(0,3000)=6000$.	

Veamos otros ejemplos de la hoja de ejercicios.

(2) ¿Tiene solución el siguiente problema? ¿Por qué?

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & f(x,y) = 2x+3y \\ \text{sujeto a} & \\ & x+y \geq 5 \\ & x+3y \geq 9 \\ & 4x+y \geq 8 \\ & x, y \geq 0 \end{cases}$$

Dibujamos el conjunto de admisibilidad



$x+y=5$

x	y
0	5
5	0

$x+3y=9$

x	y
9	0
0	3

$4x+y=8$

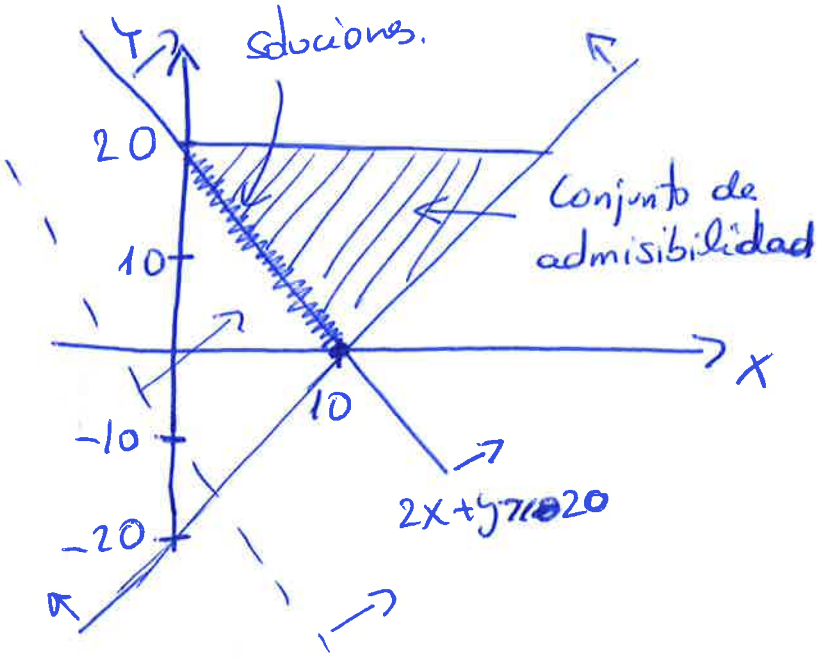
x	y
2	0
0	8

rectas $2x+3y = k$; $y = -\frac{2}{3}x + \frac{k}{3}$

El conjunto de admisibilidad es no acotado. Gráficamente se ve que el problema <u>NO</u> tiene solución.

③ ¿Tiene solución el siguiente problema? En caso afirmativo, ¿cuántas tiene?

$$\begin{cases} \text{Minimizar } f(x,y) = 2x+y \\ \text{sujeto a} \\ 2x+y \geq 20 \\ 2x-y \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 20 \end{cases}$$



$2x+y=20$

x	y
10	0
0	20

$2x-y=20$

x	y
10	0
0	-20

rectas $2x+y=k \rightarrow y=-2x+k$

Como estas rectas son paralelas a una de las aristas del conjunto de admisibilidad, el problema tiene infinitas soluciones.

(4) Productos $\langle P_1, P_2$ Talleres $\langle E_1, E_2$

Variable de optimización:

x_1 = cantidad de P1 producida en E1 (al día)

x_2 = " " P2 " " " "

x_3 = " " P1 " " E2 "

x_4 = " " P2 " " E2 "

Función objetivo: $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 200(x_1+x_3)+400(x_2+x_4)$ → Maximizar

Restricciones

$$1 — 40$$
$$x — x_1 \quad / \; x = \frac{x_1}{40} \quad \rightarrow \quad \frac{x_1}{40} + \frac{x_2}{60} \leq 1$$

$$\frac{x_3}{50} + \frac{x_4}{50} \leq 1$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 200(x_1+x_3)+400(x_2+x_4) \\ \text{sujeto a} & \\ & \frac{x_1}{40} + \frac{x_2}{60} \leq 1 \\ & \frac{x_3}{50} + \frac{x_4}{50} \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}\right.$$

x_j enteros → Problema de programación lineal entera.

⑥

Mina A $\left\{\begin{array}{llll} 1 & \text{tonelada de } \cancel{\text{máxima}} \text{ calidad} & \text{máxima} \\ 2 & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & \text{intermedia} \\ 6 & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & \text{baja} \end{array}\right.$

coste → 1000 euros

Mina B $\left\{\begin{array}{llll} 2 & \text{toneladas de calidad} & \text{máxima} \\ 5 & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & \text{media} \\ 6 & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & \text{baja} \end{array}\right.$

coste → 1400 euros

pedido: 90 ton. de calidad máxima + 120 ton. media + 180 baja

x_1 = nº de días de trabajo en mina A

x_2 = " " " " " " " B

~~Costes:~~

~~función objetivo: 100~~

función objetivo: $1000x_1 + 1400x_2$ → Minimizar

Restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \geq 90 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 120 \\ 6x_1 + 6x_2 \geq 180 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x_1, x_2) = 1000x_1 + 1400x_2 \\ \text{sujeto a} & \end{array}\right.$$